

den Kurven verschieden; sie verhalten sich wie 3 : 1. Ein zweites und ein drittes Maximum wie bei THURN und BOTHE ist in Abb. 3 nicht erkennbar. Derselbe Widerspruch tritt auf, wenn man noch die Kurven  $a_1$  und  $c$  in Abb. 6 der erwähnten Arbeit hinzunimmt, die sich etwa mit den Kurven  $A_{(1)}B_{(1)}$  und  $A_{(0)}B_{(1)}$  dieser Arbeit vergleichen lassen.

Volle Übereinstimmung besteht mit der Arbeit von FAISSNER u. a.<sup>1</sup>. Entsprechend der Tatsache, daß bei der Aufnahme der Kurve  $B_1, \dots$  die Strahlung von ca. 20 g/cm<sup>2</sup> Beton vorgefiltert wurde, ist zwischen den beiden Kurven  $a$  und  $b$  der Abb. 2 der genannten Arbeit zu interpolieren. Die Überhöhung des Rossi-Maximums beträgt hier wie dort ca. 180 Ko/h.

Die gleiche Übereinstimmung besteht mit dem Ergebnis der Arbeit von JANOSSY und NAGY<sup>3</sup>. Auch die Arbeiten von MAZE<sup>6</sup> und PFOTZER<sup>4</sup> liefern ähnliche Ergebnisse.

Die Veröffentlichungen aller übrigen Autoren, die die Übergangskurven untersucht haben, lassen sich aus dem schon mehrfach angedeuteten Grunde der anderen Geometrieverhältnisse nicht zum Vergleich mit dieser Arbeit heranziehen.

<sup>6</sup> R. MAZE, Phys. Rev. **85**, 697 [1952].

## Zusammenfassung

Aufgabe der vorliegenden Arbeit war es, die Übergangskurve für Blei jenseits des durch die Kaskadentheorie als Folge der weichen Komponente der kosmischen Strahlung erklärten Maximums bei etwa 10 mm (Rossi-Maximum) auf weitere Anomalien hin zu untersuchen, wie sie von mehreren Autoren gefunden worden sind. Um die auftretenden Effekte als Folge der sie verursachenden Komponente zu erkennen, wurde von vornherein darauf Wert gelegt, durch geeignete Anordnungen von Zählrohrlagen und Bleischichten die einzelnen Komponenten zu trennen.

Im Sinne der gestellten Aufgabe muß das Ergebnis der Arbeit als negativ angesehen werden. In allen unter verschiedenen Koinzidenzbedingungen aufgenommenen Kurven ist das Rossi-Maximum, sofern die weiche Komponente nicht ausgeschaltet wurde, gut zu erkennen. Anzeichen für weitere Maxima fehlen. Der Verlauf aller gemessenen Kurven läßt sich zwanglos mit den bekannten Eigenschaften der kosmischen Strahlung deuten.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und sein ständiges Interesse an ihrem Fortgang bin ich Herrn Prof. Dr. WIRTZ zu großem Dank verpflichtet. Herrn Dr. SCHULTZ danke ich besonders für wertvolle Diskussionen beim Aufbau der Apparatur und bei der Auswertung der Ergebnisse.

## Zur Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit in nichtpolaren Halbleitern

VON DIETER DORN

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule Braunschweig  
(Z. Naturforsch. **12 a**, 18—22 [1957]; eingegangen am 26. Oktober 1956)

Als Erweiterung der bisherigen BLOCHSchen Theorie wird die Energieänderung der Elektronen beim Zusammenstoß mit den thermischen Gitterschwingungen berücksichtigt. Die etwas abgeänderte BLOCHsche Integralgleichung kann wie in der bisherigen Theorie nur für hohe Temperaturen relativ zu einer Bezugstemperatur  $\Theta$  von weniger als 1° K gelöst werden. Die hierbei notwendige Beschränkung auf Elektronen mittlerer und hoher Energie wird durch Anwendung eines Variationsverfahrens umgangen. Die sich ergebende Korrektur wirkt in Richtung auf eine Vergrößerung der Beweglichkeit gegenüber dem gewöhnlichen  $T^{-1/2}$ -Gesetz, die mit abnehmender Temperatur wächst. Eine Extrapolation auf tiefe Temperaturen läßt vermuten, daß im Gebiet einiger Grad KELVIN eine andere Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit als bei normalen Temperaturen vorliegt.

Die Wechselwirkung der Elektronen mit dem akustischen Zweig der thermischen Gitterschwingungen in nichtpolaren Halbleitern ist schon von verschiedenen Autoren behandelt worden (vgl. SOMMERFELD und BETHE<sup>1</sup>, WILSON<sup>2</sup>, SEITZ<sup>3</sup>, BARDEEN und SHOCKLEY<sup>4</sup>). Hinsichtlich der Beweglichkeit ergibt

sich übereinstimmend ein zu  $T^{-1/2}$  proportionaler Ausdruck. Eine Erweiterung der Theorie stammt von SHOCKLEY<sup>5</sup>, in der auch der Einfluß der nicht-akustischen Gitterschwingungen berücksichtigt wird.

Bei Beschränkung auf die Wechselwirkung der Elektronen mit den akustischen Wärmeschwingun-

<sup>1</sup> A. SOMMERFELD u. H. A. BETHE, Handbuch der Physik (Geiger & Scheel), Bd. 24/II, Springer, Berlin 1933.

<sup>2</sup> A. H. WILSON, The Theory of Metals, Cambridge University Press, Cambridge 1953.

<sup>3</sup> F. SEITZ, Phys. Rev. **73**, 594 [1948].

<sup>4</sup> J. BARDEEN u. W. SHOCKLEY, Phys. Rev. **80**, 72 [1950].

<sup>5</sup> W. SHOCKLEY, Bell System Techn. J. **30**, 1025 [1951].



gen wurden bisher die Energieänderungen des Elektrons beim Einzelstoß in der BOLTZMANN-Gleichung vernachlässigt, die Stöße also näherungsweise als elastisch betrachtet. Dieses Verfahren wird als zuverlässig bei Temperaturen oberhalb etwa  $1^\circ\text{K}$  bezeichnet.

Im folgenden soll der Einfluß des Energieaustausches zwischen den Elektronen und dem akustischen Zweig der thermischen Gitterschwingungen auf die Verteilungsfunktionen der Elektronen im elektrischen Feld und damit auf die elektrische Leitfähigkeit bestimmt werden.

Unter der Annahme, daß sich die Gitterwellen im thermischen Gleichgewicht befinden, wird zunächst (§ 1) eine BOLTZMANN-Gleichung angegeben, die den Energieänderungen der Elektronen beim Stoß Rechnung trägt.

Leider ist eine strenge, für alle Temperaturen gültige Lösung dieser BOLTZMANN-Gleichung nicht möglich. Es wird daher ein Näherungsverfahren eingeschlagen (§ 2), das zwar auch nur auf höhere Temperaturen zugeschnitten ist, dabei aber Zusatzterme zur Verteilungsfunktion liefert, die bei Annahme elastischer Stöße nicht auftreten.

Die sich so ergebende Korrektur wirkt in Richtung auf eine Vergrößerung der Beweglichkeit gegenüber dem gewöhnlichen  $T^{-3/2}$ -Gesetz, die mit abnehmender Temperatur wächst. Eine Extrapolation auf tiefe Temperaturen macht es daher wenig wahrscheinlich, daß das  $T^{-3/2}$ -Gesetz im Gebiet einiger Grad Kelvin noch eine gute Näherung sein wird.

Eine Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit mit Hilfe der so erhaltenen Verteilungsfunktion ist nicht möglich, da die Extrapolation der an sich nur für Energiewerte der Größenordnung  $kT$  gültigen Verteilungsfunktion auch auf kleine Energiewerte Unsicherheiten mit sich bringt, die von der gleichen Größenordnung sind wie die Zusatzglieder selbst.

Diese Schwierigkeiten werden durch Anwendung eines Variationsverfahrens umgangen (§ 3). Auch hierbei beschränken wir uns wieder auf höhere Temperaturen.

## § 1. Aufstellung der Blochschen Integralgleichung

Der Kürze halber werden wir uns fortan weitgehend an die von SOMMERFELD und BETHE<sup>1</sup> gegebene Darstellung anlehnen und die Bezeichnungen, soweit nicht gesondert vermerkt, in derselben Bedeutung übernehmen.

Bei der Wechselwirkung eines Elektrons der Wellenzahl  $\mathbf{f}$  mit einer Schallwelle der Wellenzahl  $\mathbf{q}$  lautet der Energiesatz

$$E(\mathbf{f}') = E(\mathbf{f}) \pm \hbar \omega_q,$$

je nachdem, ob ein Schallquant der Energie  $\hbar \omega_q$  durch das Elektron absorbiert (+) oder emittiert (-) wird. An die Stelle des Impulssatzes tritt die Interferenzbedingung

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} \pm \mathbf{q}.$$

$\mathbf{f}$  und  $\mathbf{f}'$  sind die Ausbreitungsvektoren des Elektrons vor bzw. nach dem Stoß.

Der Zusammenhang zwischen der Energie  $E$  eines Elektrons und dem Absolutbetrag  $K$  dessen Ausbreitungsvektors sei

$$E = \lambda K^2 = (\hbar^2/2m) K^2. \quad (1)$$

Hierin ist  $m$  die scheinbare Masse des Elektrons.

Die Gleichgewichtsverteilung der Elektronen sei durch die BOLTZMANN-Funktion  $f_0(E)$  gegeben, wobei wir die Energie  $E$  vom unteren Rand des Leitfähigkeitsbandes aus zählen. Die Gitterwellen unterliegen im thermischen Gleichgewicht der PLANCKSchen Verteilungsfunktion

$$N_0(x) = 1/(e^x - 1) \text{ mit } x = \hbar u_0 q/kT.$$

Der Einfluß der Abweichungen der Gitterwellen vom thermischen Gleichgewicht auf die Leitfähigkeit soll später untersucht werden.

Zur Bestimmung der Verteilungsfunktion  $f$  der Elektronen aus der Stationaritätsbedingung

$$-eFk_1 \frac{\hbar}{m} \frac{\partial f_0}{\partial E} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Stöße}},$$

wo  $-e$  die Ladung eines Elektrons ist, macht man den folgenden spezialisierten Ansatz, für den angenommen wird, daß das äußere elektrische Feld  $F$  in  $x$ -Richtung liegt:

$$f(k) = f_0(E) - k_1 c(E) (\partial f_0 / \partial E).$$

Bei der Herleitung der BLOCHSchen Integralgleichung zur Bestimmung der Funktion  $c(E)$  erhält man den Stoßoperator zunächst als Summe über alle möglichen Ausbreitungsvektoren  $\mathbf{q}$  der Schallwellen<sup>6</sup>. Die Summation über  $\mathbf{q}$  wird durch eine Integration über den  $\mathbf{q}$ -Raum ersetzt, wozu Polarkoordinaten  $q, \vartheta, \varphi$  mit der  $\mathbf{f}$ -Richtung als Polarachse eingeführt werden.

Die Integrationen über die Winkel  $\vartheta$  und  $\varphi$  sind leicht durchzuführen. Mit der verbleibenden Integration über alle möglichen  $q$ -Werte erhält man

<sup>6</sup> Siehe Anm. 1, Gl. (34.40).

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Stöße}} = -k_1 \mathcal{L}(c) = -\frac{\Omega_0 C^2 k_1}{18 \pi M \lambda u_0 K} \frac{\partial f_0}{\partial E} \left\{ \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} \frac{q^2 dq}{e^x - 1} \left[ \left( 1 + \frac{\hbar u_0 q}{2 \lambda K^2} - \frac{q^2}{2 K^2} \right) c(E + \hbar \omega_q) - c(E) \right] \right. \\ \left. + \int_{q'_{\min}}^{q'_{\max}} \frac{q'^2 dq}{1 - e^{-x}} \left[ \left( 1 - \frac{\hbar u_0 q}{2 \lambda K^2} - \frac{q^2}{2 K^2} \right) c(E - \hbar \omega_q) - c(E) \right] \right\}. \quad (2)$$

Hierin ist  $\mathcal{L}(c)$  der bereits erwähnte Stoßoperator. Die drei ersten Terme des ersten Integrals und der vierte Term des zweiten Integrals beziehen sich auf Emissionsprozesse, bei denen das Elektron Energie abgibt, und die übrigen Terme auf Absorptionsprozesse, bei denen das Elektron Energie aufnimmt.

Die unterschiedlichen Grenzen der beiden Integrale ergeben sich aus dem Energiesatz, der in zwei verschiedenen Formen zur Anwendung kommt. Wir entnehmen ihn der ausführlichen Darstellung von SOMMERFELD und BETHE [vgl. Gl. (35.14)]:

$$\frac{dE}{dK} \left( q \cos \vartheta + \frac{q^2}{2K} \right) \mp \hbar u_0 q = 0,$$

wobei  $\omega_q = u_0 q$  gesetzt wurde. Das negative Vorzeichen des 3. Gliedes bezieht sich auf das erste Integral und das positive Vorzeichen auf das 2. Integral der Gl. (2). Die Integrationsgrenzen ergeben sich aus den Bedingungen  $|\cos \vartheta| \leq 1$  und  $q \geq 0$  zu

$$\begin{aligned} q_{\max} &= 2(K_0 + K), \\ q_{\min} &= \begin{cases} 2(K_0 - K) & \text{für } K \leq K_0 \\ 0 & \text{für } K \geq K_0 \end{cases} \\ q'_{\max} &= \begin{cases} 0 & \text{für } K \leq K_0 \\ 2(K - K_0) & \text{für } K \geq K_0 \end{cases} \\ q'_{\min} &= 0 \end{aligned}$$

Die Abkürzung  $K_0 = u_0 m / \hbar$  erlaubt uns analog zu Gl. (1) eine Energie  $E_0 = \lambda K^2$  und daraus eine Bezugstemperatur  $\Theta = E_0 / k$  zu definieren, die für die späteren Überlegungen von Wichtigkeit sein wird.  $\Theta$  liegt bei den meisten Halbleitern in der Nähe einiger Grad Kelvin.

Nach Einführung von  $x$  als Integrationsvariable lässt sich der Stoßoperator wesentlich vereinfachen, wenn man im 2. Integral  $x$  durch  $-x$  ersetzt. Hierdurch wird der Wertebereich von  $x$  auf negative Werte ausgedehnt und man erhält

$$\mathcal{L}(c) = -\frac{\Omega_0 C^2 (k T)^5}{72 \pi M \lambda^2 \hbar^3 u_0^6 m K^3} \frac{\partial f_0}{\partial E} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{x^2 dx}{|e^x - 1|} [ (x^2 - 4 \delta^2 x - 8 \delta^2 \varepsilon) c(\varepsilon + x) + 8 \delta^2 \varepsilon c(\varepsilon) ] \quad (5)$$

mit den Integrationsgrenzen  $x_{\max} = 4 \delta \sqrt{\varepsilon} (1 + \delta / \sqrt{\varepsilon})$  und  $x_{\min} = -4 \delta \sqrt{\varepsilon} (1 - \delta / \sqrt{\varepsilon})$ .

Damit lautet die sog. BLOCHSche Integralgleichung zur Bestimmung der Funktion  $c(E)$

$$\mathcal{L}(c) = e F \frac{\hbar}{m} \frac{\partial f_0}{\partial E}. \quad (3)$$

## § 2. Lösung der Blochschen Integralgleichung für höhere Temperaturen

Ebenso wie bei den Metallen ist auch bei Halbleitern eine strenge, für beliebige Temperaturen gültige Lösung der BLOCHSchen Integralgleichung kaum möglich. Es wurde daher ein Näherungsverfahren entwickelt, das zwar auch auf höhere Temperaturen beschränkt bleibt, dabei aber doch die ersten Zusatzglieder zur Verteilungsfunktion im Sinne einer Potenzreihenentwicklung liefert. Der Entwicklungsparameter dieser Reihenentwicklung sei definiert durch  $\delta = \sqrt{\Theta / T}$ , wobei stets

$$\delta \ll 1 \quad (4)$$

vorausgesetzt wird.

Die mittlere kinetische Energie der Elektronen ist  $\frac{3}{2} k T$ , so daß  $\varepsilon = E / k T$  im Mittel von der Größenordnung Eins ist. Daraus folgt

$$\frac{x}{\varepsilon} \leq \frac{x_{\max}}{\varepsilon} \approx \frac{8}{3} \delta \ll 1$$

und  $x \ll 1$  außer für sehr schnelle Elektronen, worauf wir weiter unten zurückkommen werden. Analog dazu ist unter denselben Voraussetzungen im Mittel  $K \gg K_0$ . Hierdurch wird die Annahme (4) verständlich.

Da  $x \ll \varepsilon$  sein soll, dürfen wir die unbekannte Funktion  $c(\varepsilon)$  in eine TAYLOR-Reihe nach steigenden Potenzen von  $x$  entwickeln. Hierdurch geht die Integralgleichung (3) in eine lineare Differentialgleichung für  $c(\varepsilon)$  über, die sich durch schrittweise Näherung lösen läßt.

In 1. Näherung vernachlässigen wir üblicherweise alle gegen  $\varepsilon$  kleinen Glieder, setzen also

$$x_{\max} \approx -x_{\min} \approx 4 \delta \sqrt{\varepsilon}$$

und  $c(\varepsilon + x) \approx c(\varepsilon - x) \approx c(\varepsilon)$ .

Die PLANCKSchen Funktionen in den Integranden können durch  $1/x$  ersetzt werden, wodurch sich die Integrale leicht auswerten lassen. Das Ergebnis ist die bei SOMMERFELD und BETHE [Gl. (45.15)] angeführte Näherung

$$c_1(\varepsilon) = -\frac{9\pi M \lambda^2 u_0^2 e F}{\Omega_0 C^2 k T K}.$$

Sie entspricht den eingangs erwähnten elastischen Stößen zwischen Elektronen und Gitterwellen. Das negative Vorzeichen erklärt sich aus der Wahl von  $-e$  als Ladung eines Elektrons.

In 2. Näherung werden alle Glieder des Stoßoperators sowie die Integrationsgrenzen exakt berücksichtigt. Wir machen den Störansatz

$$c_2(\varepsilon) = c_1(\varepsilon) [1 + \xi(\varepsilon)],$$

wobei angenommen werden soll, daß das Störglied  $|\xi(\varepsilon)| \ll 1$  ist.

Wie die ausführliche Rechnung ergibt, fallen wegen der Ähnlichkeit der beiden im Stoßoperator auftretenden Integrale alle zur 1. Potenz des Entwicklungsparameters  $\delta$  proportionalen Glieder weg, so daß  $\xi \sim \delta^2$  wird. Wir müssen daher im TAYLOR-Ansatz für  $c(\varepsilon \pm x)$  die drei ersten Glieder der Entwicklung berücksichtigen.

In konsequenter Durchführung des Näherungsverfahrens wird in allen Gliedern, die in 1. Näherung vernachlässigt werden, die Funktion  $c(\varepsilon)$  durch die 1. Näherung ersetzt. Die Differentialgleichung für  $c(\varepsilon)$  geht damit in eine gewöhnliche lineare Gleichung für  $\xi(\varepsilon)$  über. Der hierbei gemachte Fehler ist von höherer als 2. Ordnung in  $\delta$ , kann also vernachlässigt werden.

Da die Integration über die PLANCKSche Funktion nicht explizit durchgeführt werden kann, benutzen wir für  $x/(e^x - 1)$  die sog. BERNOULLISCHE Entwicklung<sup>7</sup>, die für  $|x| < 2\pi$  konvergiert. Diese Voraussetzung ist außer für sehr schnelle Elektronen, also

große  $\varepsilon$ , stets erfüllt. Die entstehenden Integrale lassen sich elementar lösen. Das Ergebnis dieser Rechnung ist

$$\xi(\varepsilon) = -\frac{\delta^2}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{16}{3} \varepsilon + \frac{8}{9} \varepsilon^2 \right). \quad (6)$$

Beim Ansatz für die 2. Näherung hatten wir vorausgesetzt, daß das Störglied  $|\xi(\varepsilon)| \ll 1$  sei, was für Elektronen mittlerer Energie sehr gut erfüllt ist, da  $\delta^2 = \Theta/T \ll 1$  sein soll. Eine Diskussion der in Gl. (6) enthaltenen Funktion  $\xi(\varepsilon)$  zeigt jedoch, daß ihr Absolutbetrag sowohl für kleine wie auch sehr große  $\varepsilon$  groß gegen Eins wird. Der Bereich sehr kleiner  $\varepsilon$ -Werte ist unwichtig, da er ohnehin nicht im Gültigkeitsbereich  $\varepsilon \gg \delta^2$  der gemachten Näherung liegt. Der Einfluß der sehr schnellen Elektronen ( $\varepsilon \gg 1$ ) auf die Leitfähigkeit ist nur gering, da diese Energiezustände nur sehr schwach besetzt sind, was sich im exponentiellen Abfall der Verteilungsfunktion äußert.

Die elektrische Leitfähigkeit wurde im Rahmen der bisherigen Theorie durch Anwendung der obigen 1. Näherung auf den ganzen Energiebereich gewonnen. Hierbei wurde im allgemeinen nicht berücksichtigt, daß diese Lösung der BLOCHSchen Integralgleichung nur für  $\varepsilon \gg \delta^2$  gültig ist.

Die Größe des so gemachten Fehlers läßt sich nur schwer abschätzen, da der Verlauf von  $c(\varepsilon)$  für kleine  $\varepsilon$  auch nach der vorliegenden Näherung nicht bekannt ist.

Benutzt man trotzdem Formel (6) zur Berechnung der Leitfähigkeit in 2. Näherung im ganzen Energiebereich von  $\varepsilon = 0$  bis  $\infty$ , so erhält man den Zusatzfaktor  $\left(1 + \frac{23}{9} \frac{\Theta}{T}\right)$  zur üblichen Formel.

### § 3. Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit mit Hilfe des Variationsverfahrens

Die oben erwähnten Unsicherheiten bei der Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit können durch Anwendung eines Variationsverfahrens umgangen werden. Wie KOHLER<sup>8</sup> zeigen konnte, läßt sich die BLOCHSche Integralgleichung in ein Variationsprinzip umschreiben, das näherungsweise mit Hilfe des RITZschen Verfahrens behandelt werden kann. Hierbei konvergieren aufeinanderfolgende Näherungswerte für die elektrische Leitfähigkeit stets im gleichen Sinn gegen einen Maximalwert.

<sup>7</sup> Siehe z. B. Anm. <sup>2</sup>, S. 336.

<sup>8</sup> M. KOHLER, Z. Phys. **125**, 679 [1949].

Im folgenden werden wir uns der Kürze halber bis auf geringe Änderungen der von WILSON<sup>2</sup> gegebenen Darstellung des Variationsverfahrens anschließen, obwohl in unserem Fall bei verschwindendem Temperaturgradienten eine etwas einfachere Form möglich wäre.

Die elektrische Leitfähigkeit ergibt sich danach zu

$$\sigma = \frac{16 \pi (2m)^{1/2} e^2}{3 \hbar^3} \left[ \frac{(a_0^{(2)})^2}{d_{00}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(D_a^{(n-1)})^2}{D^{(n-1)} D^{(n)}} \right]. \quad (7)$$

Die hierin auftretenden Integrale sind

$$d_{rs} = kT \int_0^{\infty} E^{3/2} \epsilon^r \mathcal{L}(\epsilon^s) d\epsilon \quad (8)$$

$$\text{und } a_r^{(2)} = \int_0^{\infty} E^{3/2} \epsilon^r \frac{\partial f_0}{\partial E} d\epsilon \quad (9)$$

mit  $\epsilon = E/kT$ . Die aus den  $d_{rs}$  gebildete Matrix ist symmetrisch, d. h. es ist  $d_{rs} = d_{sr}$ . Ist  $D = |d_{rs}|$  die zugehörige Determinante, so erhält man hieraus die Determinante  $D^{(n)}$  durch Beschränkung auf die  $n$  ersten Zeilen und Spalten.  $D_a^{(n-1)}$  sei eine Determinante von  $n$  Zeilen und Spalten, die aus  $D^{(n)}$  entsteht, wenn man die letzte Zeile oder Spalte durch  $a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \dots, a_{n-1}^{(2)}$  ersetzt.

Da die Determinanten  $D^{(n)}$  positiv sind, zeigt Gl. (7) eine monotone Zunahme der Leitfähigkeit mit wachsendem  $n$ .

Bei der Durchführung des Variationsverfahrens im Bereich hoher Temperaturen im oben gebrauchten Sinne wollen wir uns auf die drei ersten Näherungen beschränken. Hierbei berücksichtigen wir alle Glieder bis zur 2. Potenz in  $\delta \ll 1$ .

Für die Koeffizienten  $d_{rs}$  ergibt sich damit nach Gl. (8) unter Benutzung des Stoßoperators (5)

$$\begin{aligned} d_{00} &= d \left( 1 - \frac{7}{3} \delta^2 \right), & d_{11} &= 12d \left( 1 - \frac{25}{18} \delta^2 \right), \\ d_{01} &= 3d \left( 1 - \frac{16}{9} \delta^2 \right), & d_{21} &= 60d \left( 1 - \frac{4}{5} \delta^2 \right), \\ d_{02} &= 12d \left( 1 - \frac{19}{18} \delta^2 \right), & d_{22} &= 360d \left( 1 - \frac{1}{3} \delta^2 \right), \end{aligned}$$

worin zur Abkürzung

$d = 8n(kT)^{3/2}/3\pi^{1/2}\alpha$  und  $\alpha = 3M\hbar u_0^2/2\pi\Omega_0 C^2$  gesetzt wurde.  $n$  ist die Dichte der Elektronen im Leitfähigkeitsband. Ferner ist nach Gl. (9)

$$\begin{aligned} a_0^{(2)} &= -3\pi^2 n \hbar^3 (2m)^{-3/2}; \\ a_1^{(2)} &= \frac{5}{2} a_0^{(2)}; \quad a_2^{(2)} = \frac{35}{4} a_0^{(2)}. \end{aligned}$$

Hiermit lassen sich die Determinanten  $D^{(n)}$  und  $D_a^{(n-1)}$  leicht ausrechnen.

Die elektrische Leitfähigkeit unter Annahme elastischer Stöße zwischen Elektronen und thermischen Gitterwellen ist

$$\sigma_0 = \frac{\alpha n e^2}{2m} \left( \frac{\hbar^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2}.$$

Hiermit lauten die drei ersten Näherungen nach dem Variationsverfahren

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{9\pi}{32} \sigma_0 \left( 1 + \frac{7}{3} \frac{\Theta}{T} \right), \\ \sigma_2 &= \frac{39\pi}{128} \sigma_0 \left( 1 + \frac{329}{117} \frac{\Theta}{T} \right), \\ \sigma_3 &= \frac{1275\pi}{4096} \sigma_0 \left( 1 + \frac{2153}{765} \frac{\Theta}{T} \right). \end{aligned}$$

Die verschiedenen Näherungsformeln für  $\sigma$  lassen erkennen, daß der Zahlenfaktor vor der Klammer offenbar ziemlich rasch gegen Eins konvergiert, wie es dem Grenzfall  $T \rightarrow \infty$  entspricht. Das Zusatzglied enthält noch die Unsicherheit des Faktors vor der Klammer. Seine Größenordnung wird jedoch durch diese Rechnung bereits sichergestellt.

Der Einfluß der Energieänderung der Elektronen bei der Wechselwirkung mit den thermischen Gitterschwingungen führt also zu Abweichungen vom gewöhnlichen  $T^{-3/2}$ -Gesetz der Beweglichkeit, die mit abnehmender Temperatur größer werden. Der Gültigkeitsbereich der vorliegenden Betrachtungen dürfte bei einem  $\Theta$ -Wert von beispielsweise  $0.2^\circ\text{K}$  bei Germanium ( $u_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ cm/sec}$  und  $m = 1/4$  der Elektronenmasse) bis etwa  $20^\circ\text{K}$  heruntergehen. Hierbei ergibt sich eine Zunahme der Beweglichkeit um etwa 3% gegenüber der bisherigen Theorie. Infolge der Überlagerung durch andere Effekte dürfte der experimentelle Nachweis dieser Abweichungen vom  $T^{-3/2}$ -Gesetz der Beweglichkeit schwierig sein. Immerhin lassen sie ein abweichendes Verhalten der Beweglichkeit bei tiefen Temperaturen vermuten.

Herrn Prof. Dr. M. KOHLER möchte ich an dieser Stelle herzlich danken für die Anregung zu dieser Arbeit und zahlreiche wertvolle Diskussionen.